

María Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca, España

La investigación en historia de la educación matemática

Introducción

Desde hace algunos años, dentro del ámbito de la investigación en educación matemática, una corriente que está resultando especialmente atractiva, apasionante y fructífera es la relacionada con la investigación histórica. Aunque todavía no hay muchos investigadores involucrados en ella, quizás por desconocimiento del propio método de investigación, ya se han obtenido algunos resultados importantes. Si hemos de empezar por el principio, debemos de formular las siguientes preguntas: ¿qué entendemos por investigación histórica en educación?, ¿cuáles son las características y fases que definen el método de investigación histórica?, ¿qué resultados se están obteniendo? Trataremos de responder a estas preguntas revisando nuestra propia investigación histórica en educación matemática, procurando escoger episodios significativos que ilustren el tema. Así, iremos exponiendo, en relación con cada etapa de la investigación histórica, las características de alguna de nuestras investigaciones, permitiéndonos la licencia de incluir aspectos relativos a otras fases y de avanzar algunas de las conclusiones establecidas en dicha investigación, con el fin de saciar la posible curiosidad que surja en torno al tema.

¿Qué es la investigación histórica? Según Fox (1981), la investigación histórica en educación es una labor útil y actual caracterizada por tratar de aclarar problemas de interés actual mediante un estudio intensivo de materiales ya existentes. El planteamiento más conocido y más claro de una investigación histórica se da en las fases en las que se trata de descubrir materiales desconocidos por las generaciones precedentes, pero el aspecto más importante es la reinterpretación de los acontecimientos a la luz de las nuevas técnicas e informaciones. Durante una investigación histórica, el investigador debe tener "la flexibilidad suficiente para ir en contra de los planteamientos vigentes y ser capaz de descubrir una nueva relación, explicación o intuición, si existe en los datos". (p. 459).

Concretando un poco más, para Cohen y Manion (1990) es "la situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados". El pasado "además incluye no sólo hechos y acontecimientos, sino también estructuras y procesos, sincronías y diacronías de distinta naturaleza y espesor" (Viñao, 1997, p. 27).

Más sugerente, por las posibilidades que se abren, es considerar la investigación histórica

Términos clave: Educación matemática, Historia, Método, Investigación, España

Keywords: Didactics, History, Teaching methods, Research, Spain

Fecha de recepción: Mayo 2009

Fecha de aprobación: Octubre 2009

Notas sobre el artículo:

* Este artículo fue una conferencia dada en la Facultad de Educación de la Universidad Autónoma del Yucatán el 12 de febrero de 2009 y una parte de ella formó parte de una conferencia dada en Granada (España) en el año 2003.

* Todas las investigaciones que se incluyen en este escrito se han realizado en España y por lo tanto se refieren a su sistema educativo.

como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas, tendencias y, en nuestro caso, aspectos relacionados con la educación (Gall et al, 1996). Así Tiana (1988) establece que la investigación histórica es la "aplicación del proceso general del método científico a las peculiares características del estudio histórico desde un punto de vista epistemológico".

Una característica diferenciadora de la investigación histórica en educación respecto de otros tipos de investigación educativa es que el historiador descubre información a través de la búsqueda de fuentes históricas tales como textos, diarios, documentos oficiales y reliquias. En la investigación histórica las fuentes están disponibles antes que el historiador formule una hipótesis, seleccione un tópico y designe un plan de investigación. El problema, a veces, es localizar las fuentes y obtener autorización para utilizarlas.

Si ponemos el centro de atención en el método de investigación, cabe preguntarnos ¿Cuáles son las características y fases que definen el método de investigación histórico? El método de investigación histórico está determinado por unas fases bien delimitadas que reciben unas denominaciones ya clásicas. Dichas fases son:

- Planteamiento de la investigación.
- Heurística. Crítica.
- Análisis de la documentación
- Hermenéutica.
- Exposición

Iremos describiendo cada una de estas fases y relacionándolas con algunas de nuestras investigaciones.

Planteamiento de la investigación.

En la primera fase de planteamiento de la investigación, se delimita el tema de investigación que incluye: elección del tema de investigación, conocimiento del estado de la cuestión, determinación de la línea de investigación (en el marco de un programa de investigación), establecimiento de los periodos de tiempo que se van a investigar desde el punto de vista pedagógico más que histórico-político, y el aspecto fundamental que consiste en un primer sondeo de los fondos documentales que existen, y que se pueden localizar para establecer las posibilidades que brinda dicho material. Este sondeo permite establecer el futuro de la investigación y formular unas hipótesis iniciales. Una vez contemplados los aspectos anteriores, es el momento adecuado para delimitar las fases de la investigación.

Episodio 1

Algunos aspectos epistemológicos del concepto de límite

Entre los años 1995 a 1997 se desarrolló un proyecto de investigación bajo el título "Los conceptos de límite y continuidad en educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos" uno de cuyos objetivos era:

"Descubrir las concepciones que tienen los alumnos de secundaria sobre los conceptos de límite y continuidad, y encontrar las posibles relaciones entre ellas y las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de la matemática"

Utilizamos como punto de partida para iniciar la investigación los estudios de Cornu (1983), Sierpiska (1985, 1987), El Bouazzoui (1988) que demuestran que existe una estrecha relación entre

las dificultades de los alumnos en relación con los conceptos de límite y continuidad respectivamente, y los problemas de la construcción del conocimiento matemático a lo largo de la historia. La investigación se diseñó trazando dos líneas paralelas de estudio: por un lado se elaboraron sendos cuestionarios (uno relativo al límite y otro referente a la continuidad) que nos permitieron analizar las concepciones de los alumnos en torno a estos dos conceptos. Simultáneamente, se hizo el estudio histórico de estos conceptos. Los primeros sondeos a partir de los cuales establecimos las posibilidades de esta investigación fueron fundamentalmente fuentes secundarias como: Boyer (1986), Bourbaki (1972), Dhombres et al. (1987), Dugac (1981), Grattan-Guinness (1984), El Bouazzoui (1988), Rey Pastor y Babini (1981), Youskchevitz (1976). Se estableció que el periodo de tiempo en el que se iba a centrar nuestra investigación comprendería desde las primeras intuiciones de los matemáticos en torno a estos conceptos hasta las definiciones formales de principios del siglo XX. A partir de aquí se identificaron diferentes etapas según la concepción que imperaba en el momento que, en síntesis, son las siguientes en relación con el concepto de límite:

1. La concepción de los matemáticos hasta finales del siglo XVII con la idea de aproximarse mediante procesos geométricos iterados que podemos encontrar en el método de exhaustión de Eudoxo o en la comparación de áreas de círculos de Hipócrates de Chios.
2. La concepción de Euler y Lagrange, donde la atención se centra exclusivamente en los aspectos relacionales de la función sin tener en cuenta los entornos.
3. La concepción de D'Alembert y de Cauchy, que está relacionada con la idea de "aproximarse". Tanto en la definición de D'Alembert como en la de Cauchy se expresa el concepto de límite como "cantidades variables que se aproximan a una fija difiriendo de ella en menos de una cantidad dada" aunque en D'Alembert el límite no se puede alcanzar y en Cauchy es alcanzable.
4. La concepción de Weierstrass que corresponde al proceso de aritmetización del Análisis Matemático.
5. La concepción topológica de Hausdorff

Además, como ya se ha dicho, se estudiaron las concepciones de alumnos de 2º de BUP y COU acerca del límite y la continuidad estableciéndose diez criterios de justificación para el límite. Entre las concepciones que tienen los alumnos en relación con el concepto de límite algunas podemos identificarlas con las concepciones históricas 2, 3 y 4, siendo las dos primeras muy próximas a los criterios de justificación utilizados por los alumnos en sus respuestas al cuestionario propuesto. Por ello, una de las conclusiones establecidas en esta investigación fue que "el sentido común que evoca el concepto de límite, favorece una concepción del límite como barrera intraspasable y no alcanzable".

La Heurística.

La fase correspondiente a la heurística es en la que se lleva a cabo la búsqueda y selección de fuentes documentales, que serán todos aquellos documentos que nos den noticias del pasado educativo. Pueden ser documentos escritos, sonoros, pictóricos, audiovisuales, arquitectónicos, de mobiliario, de útiles escolares,... Entre los primeros debemos abarcar una gama bastante amplia: inscripciones, correspondencia, diarios, memorias, informes, reglamentos, planes, cartas, bulas, libros de texto, apuntes, enciclopedias, periódicos, revistas, guías, libros de actas, registros,... Entre los sonoros: discos, cintas, bandas sonoras,... Entre los pictóricos: grabados, cuadros, dibujos, fotografías, diapositivas, películas, microfilms,... Entre los arquitectónicos: edificios, aulas, bibliotecas,... En cuanto al mobiliario: pupitres, mesas, bancos,... Entre los útiles escolares: tablillas, punzones, plumas, tinta, tiza, lapiceros, pizarras, mapas, reglas, carteras, carpetas,...

Para localizar estos documentos se suele recurrir a los archivos históricos y los de las diferentes

universidades así como a las bibliotecas municipales, de universidades, de centros de enseñanza, las hemerotecas o los museos. También hay que tener en cuenta los repertorios bibliográficos y catálogos.

Una vez localizadas las fuentes hay que clasificarlas y seleccionarlas tanto para que no se produzcan vacíos documentales como para que no haya redundancias y realizar la crítica histórico pedagógica, necesaria para comprobar la autenticidad y exactitud de las fuentes documentales.

Episodio 2:

El concepto de límite en los libros de texto de secundaria

Durante los últimos años se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula. De acuerdo con Schubring (1987), si se parte del hecho de que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto utilizados para enseñar, se llega a la necesidad de un análisis de dichos libros de texto. La producción abundante de manuales, la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula de este material, su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en la historia de la educación matemática.

En torno a este tema se realizó un análisis de libros de texto estudiando los cambios que se han producido a lo largo de más de cincuenta años en un concepto clave para la enseñanza del Análisis Matemático como es el de límite funcional (Sierra, González y López, 1999; 2001). El uso de diversas ediciones de algunos libros analizados, su comparación con otros libros del mismo periodo y su relación con los programas oficiales de su momento nos proporcionaron los datos esenciales para concretar cuál ha sido la evolución de dicho concepto.

Se localizaron y seleccionaron libros publicados desde la Guerra Civil española (1936-1939) hasta finales del siglo XX. De acuerdo con Schubring (1987), la producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas al uso, además, existiendo en el caso español disposiciones legales sobre el currículo, los libros de texto tienden a adaptarse a ellas. Por esta razón también se analizaron los planes de estudio publicados en cada momento. Para indagar acerca de la inclusión de estos conceptos en la educación secundaria en España, se utilizaron fuentes secundarias como: Utande (1964), García (1980), Cuesta (1985), Díaz de la Guardia (1988), Hormigón (1991), Rico y Sierra (1994), Cobos (1995), Vea (1995), que nos permitieron repasar la historia de la educación en España durante los siglos XIX y XX. Esto sirvió para localizar los planes de estudio en las Gacetas y Boletines correspondientes, para establecer la fiabilidad de los datos obtenidos y para determinar los conceptos de Análisis Matemático que contemplaban dichos planes de estudio; los planes de estudio, así localizados, son ya fuentes primarias.

- Gaceta de Madrid de 21 de octubre de 1934 (Cuestionarios del plan de 1934)

- Boletín Oficial de 10 de febrero de 1954 (Cuestionarios del plan de 1953)

- Boletín Oficial del Ministerio de Educación y Ciencia de 5 de octubre de 1967

(Cuestionarios reformados del Bachillerato Elemental del plan de 1953)

- Boletín Oficial del Estado de 18 de Abril de 1975 (Cuestionarios de BUP)

- Boletín Oficial del Estado de 17 de marzo de 1978 (Cuestionario de COU).

- Boletín Oficial del Estado de 29 de enero de 1988 (COU, nueva ordenación)

- Boletín Oficial del Estado de 21 de octubre de 1992 (Currículo de Bachillerato LOGSE)

Los libros se han agrupado en periodos que en términos generales corresponden a los sucesivos planes de estudio. El criterio para su selección fue el de los autores más famosos o las

editoriales más importantes en cada uno de los periodos, también se procuró que los autores elegidos tuvieran producción en los distintos periodos para poder estudiar la evolución del concepto de límite.

Los periodos y los libros seleccionados han sido los siguientes:

1. Periodo comprendido entre 1934 y 1967. Abarca desde el final de la Guerra Civil española hasta 1967 en que se publican los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el bachillerato. Durante este periodo estuvieron vigentes dos planes de estudio: el de 1938 que se promulga durante la Guerra Civil y se modifica en el de 1953. El concepto de límite aparece en los cuestionarios de sexto curso dentro del bloque de Análisis. Los libros analizados se agruparon en dos bloques determinados por el tratamiento diferenciado que se hace del concepto de límite: mientras que los libros del bloque A se parte de la noción de sucesión y el concepto de variable, en los libros del Bloque B, el concepto de límite adquiere un status propio.

Tabla 1:
Libros analizados durante el primer periodo.

Bloque A	Bloque B
Fernández de Castro, M. y Jiménez Jiménez, J.L. <i>Matemáticas. Preparación del examen de estado</i> . Escelicer. Cádiz-Madrid. (sin fecha, anterior a 1953)	Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A. <i>Matemáticas. 6º curso de bachillerato</i> . Los autores. Madrid. 1950.
Bruño. <i>Matemáticas 6º curso</i> . Ediciones Bruño. Madrid. 1968.	Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A. <i>Matemáticas. 5º curso de bachillerato</i> . Los autores. Madrid. 1968a.
	Ríos, S. y Rodríguez San Juan A. <i>Matemáticas. 6º curso de bachillerato</i> . Los autores. Madrid. 1968b.

2. Introducción de la matemática moderna (1967-1975). Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado Polivalente (BUP) en 1975. Viene marcado por la constitución en el año 1962 de la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media presidida por el profesor Abellanas. Esta Comisión editó en los años 1967 y 1969 textos piloto para 5º y 6º curso de bachillerato respectivamente, y se convirtieron, de hecho, en un nuevo programa de matemáticas que progresivamente se fue implantando en el bachillerato y cuyos cimientos eran la teoría de conjuntos y las estructuras matemáticas en sentido bourbakista. Los libros de este periodo se agruparon en tres bloques que siguen tres tendencias claramente diferenciables: así los libros del bloque A mantienen el modelo correspondiente al periodo anterior, los del bloque B comprenden los textos piloto y los que siguen sus orientaciones e ideas, y los del bloque C aunque introducen una matemática estructural y axiomática, también proponen actividades a los alumnos y las explicaciones se apoyan en ellas.

Tabla 2:

Libros analizados durante el segundo periodo.

Bloque A	Bloque B	Bloque C
Sin autores. <i>Matemáticas sexto curso.</i> Edelvives: Zaragoza, 1972 (aprobado por OM 23-2-68).	Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J. y Marcos de Lanuz, F. <i>Matemática Moderna.</i> <i>Quinto curso.</i> MEC Madrid, 1967.	Agustín, J.M. y Vila, A. <i>Matemáticas 6º Bachillerato, Vol 2.</i> Vicens Vives: Barcelona, 1973.
Segura, S. <i>Matemáticas</i> <i>6º curso.</i> ECIR: Valencia, 1974.	Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J. y Marcos de Lanuz, F. <i>Matemática</i> <i>Moderna. Sexto curso.</i> MEC Madrid, 1969.	Marcos, C. Y Martínez, J. <i>Matemáticas generales COU.</i> SM: Valencia, 1973
Tuduri, J. y Casals R. <i>COU Matemáticas especiales.</i> Vimasa: Terrasa, 1974	Marcos de Lanuz, F. <i>Matemáticas 5º curso.</i> G del Toro: Madrid, 1972a.	
	Marcos de Lanuz, F. <i>Matemáticas COU optativa.</i> G del Toro: Madrid, 1972b.	

3. Desarrollo del plan de estudios de Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) y del Curso de Orientación Universitaria (COU) (1975-1995). Este periodo está asociado a la Ley General de Educación y Financiación de la Reforma Educativa promulgada el 4 de agosto de 1970; sin embargo, hasta el año 1975, no se estableció el currículo para el nuevo bachillerato (decreto del 23 de enero de 1975, desarrollado en el BOE del 18 de abril del mismo año). El concepto de límite aparece en los documentos oficiales en 2º curso, sugiriendo como orientación didáctica introducirlo de forma métrica en contraposición con la orientación topológica del periodo anterior, y, en cambio, reducir el cálculo de límite a casos sencillos. Los libros de este periodo se han distribuido en cuatro bloques: los libros del bloque A continúan la línea iniciada en el periodo anterior, en los libros del bloque B se impone la tendencia de la matemática moderna, una metodología diferente es la que presenta el Grupo Cero de Valencia siguiendo la fenomenología didáctica de Freudenthal, mientras que en los libros del último bloque está presente la influencia de nuevos planteamientos que se concretarán en la ley venidera.

Tabla 3:

Libros analizados durante el tercer periodo.

Bloque A	Bloque B	Bloque C	Bloque D
Marcos de Lanuz, F. <i>Matemáticas</i> <i>2º B.U.P.</i> G del Toro: Madrid, 1978.	Guillén, J., Navarro, R., Peña, J.A. y Ferrer, S. <i>Matemáticas</i> <i>2º Bachillerato</i> . Magisterio: Madrid, 1976.	Grupo Cero. <i>Matemáticas de</i> <i>bachillerato. Volumen 2</i> . Teide: Barcelona, 1985.	Hernández, F., Lorenzo, F., Martínez, A. y Valés, J. <i>Signo II. Matemáticas</i> <i>2º Bachillerato</i> . Bruño, 1989.
Marcos de Lanuz, F. <i>Matemáticas</i> <i>especiales, COU</i> . G del Toro: Madrid, 1976.	Boadas, J., Romero, R. y Vilalbi, R. <i>Matemáticas 2º curso</i> <i>de BUP</i> . Teide: Barcelona, 1976.		Colera, J. y Guzmán, M. <i>Bachillerato</i> . <i>Matemáticas 2</i> . Anaya: Madrid, 1994
Agustí, J. M. y Vila, A. <i>Matemáticas</i> . <i>Vectores, 2º BUP</i> . Vicens Vives: Barcelona, 1976.	Etayo, J., Colera, J. y Ruiz, A. <i>Matemáticas 2º de BUP</i> Anaya: Salamanca, 1977.		Guzmán, M. y Colera, J. <i>Matemáticas</i> <i>ICOU</i> . Anaya: Madrid, 1989.
	Anzola, M., Caruncho, J. y Gutiérrez, M. <i>Matemáticas 2º de</i> <i>Bachillerato</i> . Santillana: Madrid, 1976.		
	Lazcano, I. y Barolo, P. <i>Matemáticas 2º BUP</i> Edelvives: Madrid, 1993.		
	Álvarez, F., García, C., Garrido, L.M. y Vila, A. <i>Matemáticas. Factor 2</i> . Vicens Vives: Barcelona, 1992.		

4. Periodo comprendido entre 1995 y 2000. Abarca desde la publicación en 1995 de los decretos curriculares derivados de la LOGSE hasta la fecha de desarrollo de nuestra investigación. Durante estos años observamos distintos fenómenos en la producción de libros de texto. Por un lado, algunas editoriales clásicas en general han "maquillado" los libros del periodo anterior, adaptándolos al nuevo bachillerato; por otro, editoriales dedicadas a la enseñanza básica también publican en ESO y Bachillerato; y editoriales tradicionalmente dedicadas a la enseñanza universitaria están elaborando libros para el bachillerato. Los libros que seleccionamos, por coherencia con el resto de los periodos, corresponden al primer tipo de editoriales.

Tabla 4:

Libros analizados durante el cuarto periodo.

Grupo Azul 21. <i>Matemáticas 2 Ciencias de y de</i> : Madrid, 1997.
Colera, J., Oliveira, M.J. Fernández, S, y Guzmán, M. <i>Matemáticas I (Bachillerato LOGSE)</i> . Anaya: Madrid, 1996.
Colera, J., Oliveira, M.J. y Fernández, S. <i>Matemáticas 2 (Bachillerato LOGSE)</i> . Madrid: Anaya, 1997.
Vizmanos, J.R, y Anzola, M. <i>Matemáticas I</i> . SM: Madrid, 1997.

El control de la crítica externa se llevó a cabo mediante la verificación de la autenticidad (ediciones, originales) de los documentos y, procediendo a confirmar la fecha de la edición. Para la crítica interna, se elaboraron una serie de parrillas que permitieron relacionar las intenciones del autor, su ubicación en una determinada época y la identificación de los contenidos relacionados con el concepto a estudiar.

Análisis de la documentación

El análisis de la documentación nos permite estudiar el material teniendo en cuenta tanto criterios pedagógicos como históricos. Dada la cantidad de material de que se suele disponer, en esta etapa se debe diseñar algún instrumento que permita abordar el objetivo que se haya planteado.

Episodio 3:

Una clasificación de libros de texto

En una investigación reciente cuyo objetivo era: "describir los libros de texto en función de los sistemas simbólicos de representación utilizados" (González, 2002) se realizó, en primer lugar, un vaciado de diferentes investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto a la búsqueda del instrumento idóneo para realizar la investigación. Esta búsqueda se llevó a cabo en dos frentes, por un lado se analizaron las investigaciones de los historiadores de la educación en relación con el análisis de libros de texto, con esto hemos constatado que si bien los historiadores de la educación han realizado aportaciones como tesis doctorales, exposiciones, coloquios, etc. relacionados con los libros de texto, son escasos los trabajos referidos a las matemáticas. Esto ya fue detectado en Francia, mediante el trabajo de Choppin (1993) en el que hace un balance bibliométrico de la investigación francesa sobre la historia de los manuales escolares. Las razones de dicha escasez se deben, a juicio de Choppin, tanto a la falta de formación matemática de los historiadores, como al escaso interés de los matemáticos por este tema. Por otro lado, estudiamos las aportaciones realizadas dentro del campo de la educación matemática en el que han destacado en los últimos años, el estudio comparativo de Howson (1995) con libros de texto de diferentes países; los trabajos de Chevallard (1985), Chevallard y Joshua (1982) y Tavignot (1993) en relación con la transposición didáctica; la

investigación de Pimm (1987, 1994) sobre la legibilidad de los textos matemáticos; el estudio de Otte (1986) sobre las interpretaciones de los textos; la clasificación de Dormolen (1986) de los elementos imprescindibles que debe tener un libro de texto y las consideraciones de Lowe y Pimm (1996) acerca de las interacciones entre el lector, el escritor, el profesor y el libro en el aula de matemáticas.

Partiendo de los resultados establecidos en estas investigaciones, así como de las corrientes predominantes actualmente en la investigación en educación matemática, se realizó un estudio de libros de texto sobre la base de que la adquisición del conocimiento matemático es un acto de tipo social, en el que influyen tanto la época como la sociedad en la que está inmersa esta enseñanza, por lo que un apartado importante será el que se refiere a la contextualización de la obra analizada.

Para el análisis de los libros de texto se establecieron tres niveles diferentes de profundización:

- En primer lugar, se rellenó una ficha de referencia de cada una de las obras objeto de análisis, en la que se incluye: autor, año de nacimiento y fallecimiento, título de la obra, año de la primera edición indicando editorial, año de la edición consultada incluyendo editorial y lugar de edición, y localización del manual consultado.

- Seguidamente se analizó la obra desde un punto de vista general, relacionándola con el contexto en el que se ha generado dicho libro de texto. Este apartado nos dio información general acerca del texto, contextualizándolo para poder analizarlo correctamente en función de las circunstancias que rodearon su publicación. En él se reflejaron las circunstancias que hicieron que fuera escrito del modo en que ha llegado a nosotros, los objetivos que pretendía el autor, las innovaciones que se introdujeron, así como la estructura que posee el libro, es decir, su extensión, la secuenciación de los contenidos, las características de impresión o de presentación...

- Finalmente, se realizó un estudio de los diferentes sistemas de representación simbólicos en Análisis Matemático para lo que se utilizó la clasificación realizada por Janvier (1987) de dichos sistemas. De cada uno de los textos se han seleccionado sucesivas unidades de información, que se han clasificado, según los distintos tipos de sistemas de representación simbólicos, distinguiendo entre descripciones (d), tablas o diagramas (t), gráficas (g) y expresiones simbólicas (e). Además para cada uno de ellos se han considerado distintos apartados que reflejan la estructura, significado y utilidad que les dan los libros de texto.

Este último apartado nos permitió diseñar un instrumento de análisis de libros de texto encaminado a establecer su perfil identificador a partir de 20 dimensiones diferentes agrupadas en cuatro categorías: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y socio-cultural. Cada una de estas dimensiones se describió según tres modalidades distintas por lo que pudimos clasificar los libros de texto en tres tipos:

- Expositivo: Libros en los que se considera el conocimiento matemático como una acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados y relativamente inconexos y desconectados de la realidad, en los que el énfasis está puesto en la estructura matemáticas del contenido.

- Tecnológico: Se conciben las matemáticas como un conjunto de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para pensar sobre y aplicar los conceptos a diversas situaciones.

- Comprensivo: Se considera que el aprendizaje de las matemáticas se adquiere mediante el establecimiento de una red de relaciones entre los contenidos considerando fundamental la experimentación.

En la siguiente tabla se muestran de manera sintética las categorías y las dimensiones utilizadas. La lectura horizontal permite comparar las diferentes tendencias de los libros de texto; la lectura vertical permite identificar las dimensiones que se han tenido en cuenta, lo que da una visión global del tipo de análisis realizado:

Tabla 5:
Instrumento de análisis de los sistemas de representación que aparecen en los libros de texto.

CATEGORÍAS		DIMENSIONES	EXPOSITIVO	TECNOLÓGICO	COMPENSIVO
SINTAXIS	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
SEMÁNTICA	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
PRAGMÁTICO DIDÁCTICA	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/Construcción
	14	Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretación/Construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
SOCIO CULTURAL	16	Influencia social y adaptación al currículum	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al vitae	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizadas	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas

El perfil de cada libro se obtuvo rellendo una tabla en la que para cada dimensión se indica en la casilla correspondiente la orientación (expositiva, tecnológica o comprensiva) que posee el libro analizado. Para una misma dimensión podía haber varios asteriscos, en el caso de que haya unidades de información que correspondan a varios perfiles. El libro quedaba clasificado por la columna en la que aparezcan mayor número de asteriscos. Por ejemplo, en la tabla siguiente se presenta el perfil de un libro de la editorial Edelvives publicado en el año 1972.

Tabla 6:
Perfil de uno de los libros analizados.

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	Estructura del problema		*	
	Descripciones teóricas	*	*	
	Símbolos utilizados en las tablas		*	
	Símbolos utilizados en las gráficas	*		
	Tipos de expresiones simbólicas		*	
Semántica	Fenomenología	*	*	
	Tipos de descripciones	*	*	
	Tipos de tablas			*
	Tipos de gráficas			*
	Tipos de expresiones simbólicas		*	*
Pragmático- didáctica	Función de los ejercicios	*	*	
	Papel de las definiciones	*	*	
	Actividades relacionadas con las tablas		*	
	Actividades gráficas	*		*
	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum	*	*	
	Influencias didácticas	*		
	Aplicación de las tablas		*	
	Presentación de las gráficas	*		
	Complejidad de las expresiones simbólicas		*	

A la vista de la tabla, concluimos que este es un libro de carácter tecnológico que tiene ciertos aspectos expositivos, sobre todo en relación con la función o el papel que ejercen las representaciones a lo largo del texto y en cuanto a las connotaciones sociales de las diferentes representaciones utilizadas. Se presentan algunos fenómenos relacionados con los conceptos pero los aspectos más comprensivos son escasos, limitándose prácticamente a las representaciones gráficas, alguna tabla y a la gran variedad de expresiones simbólicas que se presentan en este libro.

Hermeneútica.

Una colección de datos, aunque estén muy bien clasificados, no es mas que eso: una base datos. El historiador debe dar una interpretación histórico-pedagógica. La hermeneútica es la interpretación de los datos a la luz de los análisis realizados. En esta fase se trata de dar una respuesta adecuada a las preguntas plantadas e indicar las posibles causas por las que se produjeron los hechos históricos analizados.

Episodio 4:

Etapas en la construcción del concepto de punto crítico

Tratando de responder a la pregunta ¿qué tipos de sistemas simbólicos utilizaban los

matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX en relación con los puntos críticos y de qué forma? se seleccionaron fuentes primarias como:

- L'Hôpital, G.F.A. (1696) *Analyse des infiniment petits*. París: L'Imprimerie Royale.
- MacLaurin, C. (1742) *Traité des fluxions*. París: Quai de Augustines.
- Euler, L. (1755) *Institutiones calculi differentialis*. San Petersburgo: Academia Imperialis Scientiarum.
- Bézout, E. (1764) *Cours de Mathematiques*. París: De l'Imprimerie de Ph-D. Pierres.
- Bails, B. (1797) *Principios de matemáticas*. Madrid: Imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra
- Lagrange, J. L. (1797) *Theorie des fonctions analytiques*. París: L'Imprimerie de la Republique.
- Lacroix, S. (1837) *Traité elementaire de calcul différentiel et calcul intégral*. París: Gautier-Villars.

La hermenéutica consistió en una explicación genética, en el sentido de señalar los sucesivos estadios de desarrollo, de la utilización de los diferentes sistemas simbólicos en la enseñanza de los puntos críticos, intentando responder a la pregunta de cómo ocurrió dicha evolución. También se intentó indicar las causas que han influido en dicha evolución para dar respuesta a la pregunta por qué se produjo. Es decir, se aporta una síntesis histórica de tipo genético, en el sentido de que se establecen las secuencias cronológica y causal acerca de la enseñanza de los puntos críticos.

Se han contemplado tres tipos de análisis que permiten resumir y explicar todos los aspectos analizados en cada uno de los libros:

- Análisis socio-cultural con el que se pretende dar una explicación que justifique los contenidos y su presentación en el libro en relación con la época, el lugar y los alumnos para los que fue escrito.
- Análisis epistemológico con el que se pretende analizar el status matemático que poseen los contenidos del Análisis Matemático en cada uno de los libros, concretamente en relación con los puntos críticos.
- Análisis didáctico se trata de ver el enfoque que reciben los puntos críticos en cuanto a la enseñanza-aprendizaje.

Estos tres tipos de análisis nos muestran la evolución de la enseñanza del Análisis Matemático en los ciento cincuenta años que van desde su inicio hasta su consolidación, y que nos ha permitido distinguir tres periodos que se describen a continuación.

Análisis socio-cultural.

Hay un primer periodo al que pertenecen los libros de L'Hôpital y MacLaurin caracterizados, desde el punto de vista de su estructura, por mantener una concepción clásica heredada de la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que van a aparecer a lo largo del texto, se van a suceder las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión ejemplificarla.

Un segundo periodo, corresponde a los libros de Euler y Lagrange que son más modernos en la organización de los contenidos, condicionada por la estructura algebraica que se quiere dotar a los conceptos matemáticos con el objetivo de que sea más coherente y consistente. Así se configura una moderna concepción del libro de texto matemático, que comienza con los fundamentos de la materia y culmina, tras una exposición sistemática, con las

líneas más recientes de investigación.

Por todo ello el tipo de representación dominante es la representación simbólica: la ecuación algebraica o trascendente de la función que se quiere estudiar. Los problemas que se estudian tienen un carácter exclusivamente algebraico lo que supone una descontextualización de las funciones, no se hace referencia ni a situaciones o formas de conocimiento que den lugar a ellas, ni siquiera a una descripción geométrica que permita su visualización. Por último, están los libros de Bézout, Bails y Lacroix en los que se inicia un tratamiento de tipo didáctico característico de las primeras enciclopedias.

Análisis epistemológico.

Inicialmente se posee una concepción geométrico-dinámica del Cálculo diferencial que se puede observar en el libro de L'Hôpital, pero sobre todo en el de MacLaurin. Las proposiciones y las demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico, y se realizan consideraciones acerca del cambio que se experimenta en el recorrido de las curvas. En estos libros se expone una concepción geométrico-dinámica del Cálculo Diferencial, de forma que tanto las proposiciones como las demostraciones se llevan a cabo en el lenguaje geométrico y las observaciones se realizan sobre el cambio experimentado en el recorrido de una curva.

En un segundo periodo, se ensalzan los aspectos de tipo algebraico, con lo que el objetivo está puesto en dotar de una estructura coherente y consistente a los conceptos, tal es el caso de los libros de Euler y Lagrange.

Finalmente los libros de Bézout, Bails y Lacroix fijan su centro de interés en los métodos de cálculo de los puntos críticos, utilizando para ello el cociente diferencial aunque como cociente algebraico. Muchos de los conceptos relacionados con el cálculo diferencial que se incluían en estos libros de texto han desaparecido de la enseñanza, tal es el caso de las evolutas y envolvente, los círculos osculadores o los puntos de retroceso,...

Análisis didáctico.

En el primer periodo, dado que no existe todavía un lenguaje funcional propio todo el discurso descansa sobre el estudio y análisis de curvas de forma que las representaciones más utilizadas son las gráficas en las que las curvas mantienen su significado geométrico. Los problemas que se tratan son exclusivamente geométricos y su estudio se hace desde este punto de vista, así los puntos críticos se clasifican atendiendo a este carácter, siendo el criterio la posición de la tangente: se distinguen puntos críticos que poseen tangente horizontal o vertical. En el libro de L'Hôpital se estudian de forma separada las curvas construidas a partir de un eje, de aquellas cuyo elemento básico para su construcción es un único punto, desarrollándose de forma separada el método que permite calcular los puntos críticos en un caso o en otro, aunque en ambos se realiza a partir de lo que denominaba diferencia. En el libro de MacLaurin se hace el desarrollo en términos de las fluxiones de Newton. Sorprende la visión geométrica que poseen de las ecuaciones algebraicas o de las descripciones para poder realizar la construcción de curvas. Esta visión les conducirá en algún caso a cometer errores que con otras herramientas no se habrían producido. Hay que destacar las gráficas, tan en moda hoy en día, de MacLaurin en las que aparece al mismo tiempo, una curva y su curva derivada, lo que permite hacer comparaciones entre ambas, asociando las características gráficas de cada una de ellas, y la visualización de los diferentes tipos de puntos.

Las expresiones simbólicas que se utilizan en todos los textos representan toda una

familia de funciones y se realiza un estudio de los puntos críticos en relación con los parámetros de dichas expresiones. Los tipos de funciones son muy variados, y por ejemplo, en el de MacLaurin se manejan indistintamente las variables x e y , haciéndose un estudio simétrico respecto de cada una de ellas.

En un segundo periodo, en los libros de Lagrange y Euler el tipo de representación predominante es la representación simbólica: la ecuación algebraica o trascendente de la función que se quiere estudiar. Destaca el análisis detallado que hace Euler de las operaciones algebraicas de funciones y de su derivación, clasificando dichas funciones según su expresión simbólica y estudiando la diferenciación de cada uno de estos tipos de forma pormenorizada e independiente, estableciendo todas las posibilidades en relación con los parámetros que posean dichas expresiones simbólicas.

En el caso de Lagrange hay que mencionar su utilización de los desarrollos en serie de potencias sin necesidad de recurrir a las fluxiones, a las cantidades evanescentes o las diferenciales como habían hecho los matemáticos anteriores. A partir de la noción de función, realiza su desarrollo en serie, analiza la formación de los términos de dicha serie y establece la noción de función derivada. Las expresiones simbólicas utilizadas, hacen alusión a un contexto dinámico en el que las variables son consideradas como representaciones de un movimiento que permiten, a partir de una situación actual, predecir la posición futura. Tal es la función que cumplen los desarrollos en series de potencias. Esto determina que el Cálculo Diferencial se establezca a partir de la noción de función derivada y no en la noción de diferencial, como hemos visto en los otros libros escritos en Francia.

Finalmente, en el tercer periodo, en los libros de Bézout, Bails y Lacroix se utilizan los dos tipos de representación anteriores, intentando encontrar un equilibrio entre la mayor precisión de la representación algebraica con la visualización de las propiedades gráficas de la curva correspondiente.

Los problemas que se estudian son tanto aritméticos como geométricos y están planteados desde un punto de vista más didáctico que de la propia estructura de la matemática. Todos los problemas son genéricos en el sentido de que la solución corresponde a una función de curvas, y muchos de ellos son de tipo demostración.

Se utilizan indistintamente representaciones gráficas y algebraicas buscando un equilibrio entre la mayor precisión de la segunda con la visualización de las propiedades de la gráfica de la curva correspondiente que proporciona la primera.

Todo ello configura, en este tercer periodo, una generación de libros dedicados a la formación de profesionales que deben utilizar las matemáticas y que están caracterizados por su sentido didáctico.

Exposición.

En este momento la investigación histórica está prácticamente finalizada, es el momento de dar cuenta de los hechos descubiertos, las conclusiones establecidas, los documentos consultados, el análisis realizado,... Normalmente este proceso tiene su reflejo a través de una comunicación en un Congreso, en una conferencia, en un libro o capítulo de un libro y constituye el punto final de la investigación. Pero, también a lo largo del proceso han quedado sin contestar muchos interrogantes que han surgido durante la investigación y que exigen una revisión del método utilizado, de las fuentes consultadas, del periodo analizado, y así comienza un nuevo ciclo de investigación.

En relación con esta fase de la investigación expondré un episodio relativo al análisis

de un libro de texto español del siglo XIX que surgió con motivo de un Congreso realizado en España en el que varios investigadores nos pusimos de acuerdo para trabajar sobre un matemático español que tuvo gran influencia en su momento y que fue totalmente innovador y rompedor respecto de lo que se había hecho hasta entonces. Resultado de las investigaciones realizadas en diversas universidades españolas surgió un libro sobre el matemático José Mariano Vallejo en el que yo me ocupé de analizar la parte correspondiente al Análisis Matemático. Expondré brevemente algunas cuestiones de las publicadas pues por razones de espacio no puedo incluir todos los detalles.

Episodio 5:

El Cálculo Diferencial en el Compendio de José Mariano Vallejo

La vida de Vallejo (1779 Albuñuelas-Granada-1846 Madrid), se inicia hacia finales del reinado de Carlos III y sufre numerosos avatares como consecuencia de los vaivenes de la política española. Si hacemos recuento de los acontecimientos de los que va a ser testigo, simplemente nombrando los cambios de gobierno que va a conocer: el reinado de Carlos IV, la posterior abdicación en su hijo Fernando VII, la dominación francesa, la guerra de la Independencia, el sexenio absolutista, el trienio liberal, el periodo absolutista de Fernando VII y el reinado de María Cristina, podemos hacernos una idea de los cambios en los que va a estar involucrado.

Sus primeros estudios superiores los realiza en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Granada y posteriormente se traslada a Madrid a estudiar en la sección de Arquitectura de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, siendo en aquel momento profesor de Matemáticas de dicho centro D. Antonio Varas Portilla (Medrano, 1998) y D. Benito Bails (Herranz y Medrano, 1990).

En 1801 es propuesto como profesor sustituto de Matemáticas en la Academia y un año después saca por oposición la cátedra de Matemáticas, Ataque, Fortificación y Defensa en el Real Seminario de Nobles de Madrid a la edad de 23 años. En dicha institución se encarga de reestructurar la enseñanza de las matemáticas, fruto de lo cual publica su obra más importante el Tratado Elemental de Matemáticas en 1812.

Vallejo como científico formado e influido por las ideas de la Ilustración, refleja en sus obras su preocupación por la prosperidad de la Nación en dos frentes: la educación y la aplicación de los contenidos matemáticos a diferentes aspectos prácticos de la vida procurando en todo momento dar utilidad a las matemáticas. Esta preocupación por la utilidad de las ciencias era común en aquella época y Vallejo muestra gran interés por todas aquellas ramas del saber susceptibles de aplicación para el progreso y el desarrollo. Sus obras que tienen una clara intencionalidad didáctica, también pretenden dar constancia de los últimos avances realizados en Europa de los que estará siempre al tanto, e incluirá en las sucesivas ediciones (como se puede observar comparando dichas ediciones) de sus libros de texto.

A lo largo de su vida estará implicado en actividades relacionadas con la política, la educación y las aplicaciones de las ciencias en diferentes actividades prácticas como la nivelación de Madrid, los trabajos que realizó en el Laboratorio de Fuegos artificiales,...m eran generalmente trabajos relacionados con la ingeniería civil y con el Arte Militar. En cuanto a la política su compromiso con los liberales durante la Guerra de la Independencia le llevo a tener algunos cargos de responsabilidad. Abandona Madrid y se traslada a Cádiz donde se le nombra Agregado del Laboratorio de Fuegos Artificiales y Artillería de la Plaza de Cádiz. Más tarde, por inspiración suya se crea la Academia Militar de San Fernando. Ocupa diversos cargos

políticos y el 28 de abril de 1813 se le nombra diputado por Granada en las Cortes de Cádiz. Al terminar el trienio liberal tiene que exiliarse y no vuelve a España hasta el 3 de junio de 1829. Retoma entonces su actividad científica y cuando muere Fernando VII su actividad política, así en 1844 es nombrado senador por Granada.

La preocupación por la enseñanza se reflejó en todos sus libros, y en otras actividades como el establecimiento en 1821 del Reglamento General de Instrucción pública y la creación de la Universidad Central en la que se van a utilizar sus textos. En 1833 es nombrado Vocal de la Inspección General de Instrucción Pública cuya misión era inspeccionar las escuelas sobre todo las de enseñanza primaria y de matemáticas. Su iniciativa le lleva a la creación el 25 de diciembre de 1833 de dos Escuelas Normales, una para cada sexo que eran también escuelas de adultos. En 1834 desaparece la Inspección y se crea la Dirección General de Estudios de la que forma parte con el propósito de elaborar un nuevo plan de estudio. Destaca también por su labor de editor e impresor de su editorial Garrasayaza y la implantación de su método de enseñanza de la lectura. En 1819 publica su *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas* que es un extracto de su *Tratado Elemental* (terminado en 1807 pero debido a la Guerra de la Independencia no se publica hasta 1812) dado que la voluminosidad de éste aconsejaba un texto más manejable y asequible para los estudiantes. Este texto se adoptó como libro de texto en las Universidades, Colegios y Seminarios. En la introducción, Vallejo expone la definición de algunos términos utilizados en matemáticas desde un punto de vista tanto matemático como filosófico. Aquí se incluyen algunas expresiones como: cuerpo, sensación, memoria, idea, abstracción, atención, análisis, comparación, relación, juicio, proposición, raciocinio, demostración, definición, problema, corolario, postulado, escolio, lema, ciencia, método,...

Todo lo que concierne al estudio de variables lo incluye Vallejo dentro de la parte llamada Álgebra, de hecho define lo que entiende por Análisis como: La parte del Álgebra que trata de resolver los problemas después de puestos con ecuación, se llama Análisis; cuyo espíritu consiste en suponer conocido lo mismo que trata de averiguar (p. 146, Tomo I)

La primera definición que da Vallejo tiene que ver con la distinción entre cantidad constante y cantidad variable, teniendo en cuenta que todavía no ha nacido el concepto de número real

Se llama cantidad constante la que en una misma cuestión no puede tener más de un solo valor; y cantidad variable, la que en una misma cuestión puede tener todos los valores que se quiera (Tomo I, pp. 313-314)

El hecho de que una variable pueda aumentar o disminuir según los valores que se le van dando es la esencia del Análisis en el *Compendio* de Vallejo, de forma que la noción de límite de una variable y posteriormente de una función como veremos más adelante sólo tiene sentido en relación con la variación (aumento o disminución) que experimenta esta variable.

Para definir el concepto de función utiliza la siguiente definición:

* Se llama función a toda cantidad o expresión cuyo valor depende del de una variable (Tomo II, p. 40)

Que posteriormente detalla incluyendo una clasificación de funciones muy similar a la de Euler. Podemos deducir por tanto que la concepción que maneja de función es una noción algebraica basada en la expresión simbólica

Vallejo no da una definición explícita del límite de una función en un punto sino que considera a ésta como una expresión analítica formada a partir de variables y constantes y su límite se deduce del límite de las variables que forman parte de dicha expresión algebraica y de

las relaciones que existen entre ellas y con las constantes.

En el tomo II distingue Vallejo lo que entiende por Cálculo Infinitesimal, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. En relación con el primero establece:

* Hemos visto el modo de hallar la relación de la diferencia o incremento de la función con la diferencia o incremento de la variable; y ahora debemos advertir que entre la función primitiva y el límite de esta relación, hay una dependencia que determina una cantidad por medio de la otra, y todos los recursos que la Análisis Indeterminada nos ofrece para conseguir este fin, se hallan comprendido en el tratado que se conocen en general con el nombre de Cálculo Infinitesimal. (p. 58, Tomo II)

En cuanto al Cálculo Diferencial se puede ver un paralelismo entre la definición dada por Vallejo y la de Lacroix (1765-1843):

* Este precioso cálculo tiene dos partes: la primera, que se denomina Cálculo Diferencial, trata de hallar, dada la función, el límite de la relación de su incremento con el de la variable o variables que entran en ella; (p. 58, Tomo II)

* Le Calcul différentiel est la recherche de la limite du rapport des accroissements simultanés d'une fonction et de la variable dont elle dépend (Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* 1797 p. 5)

Y en cuanto al Cálculo Integral:

* La segunda, trata de determinar la función, cuando se da conocido el límite de la relación de su incremento con el de la variable y se llama Cálculo Integral, que por consiguiente es inverso del Diferencial. (p. 58, Tomo II)

El hecho de dedicar una sección exclusivamente a la Aplicación del Cálculo Diferencial a la teoría de las líneas curvas es un indicador de la separación progresiva que se está estableciendo entre función y curva. De manera que, aunque para L'Hôpital el Análisis era el estudio de las líneas curvas, para Vallejo se concibe de una manera más amplia, y como observamos a las curvas sólo les dedica una sección a modo de aplicación.

Es a partir de la utilización de las curvas como forma de representación gráfica de las funciones y en relación con ellas cuando se establece lo que se entiende por ley de continuidad y que establece de forma similar a como la hace Lacroix (González, 2002)

* En la descripción de una línea se observa que todos los puntos se suceden los unos a los otros; lo cual constituye lo que llamamos ley de continuidad. (Tomo II, p. 102).

Vallejo establece de forma explícita la relación entre una función y una curva

* Toda función de una variable se puede representar por la ordenada de una curva de la que esta variable es la abscisa; porque si vamos dando valores particulares a la abscisa, y tomamos estas partes a lo largo de una línea y en los extremos se levantan líneas paralelas entre sí; de la magnitud que expresa la función en cada caso tendremos construida una curva cuya ecuación sea la igualación de la función propuesta con una variable (Tomo II, p. 102).

A partir de esta relación función-curva se determinan algunos elementos geométricos de las curvas utilizando para ello las herramientas del Cálculo Diferencial. Así:

* La relación de la ordenada de la curva con su subtangente corresponde al coeficiente diferencial de la función. (Vallejo, 1840, Tomo II, p. 102)

$\frac{dz}{dx}$ es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente de una curva en un punto cualquiera forma con el eje de las abscisas" (Vallejo, 1840, Tomo II, p. 104).

Podemos observar como la identificación del coeficiente diferencial con la tangente trigonométrica... se establece como aplicación y no como su definición. Las fórmulas de estos elementos geométricos las deduce a partir de la siguiente gráfica.

tangente

Aplica estas fórmulas a las secciones cónicas: círculo, elipse, parábola e hipérbola comprobando por ejemplo que para el círculo

* La tangente tirada por el extremo de la ordenada que pasa por el centro es paralela al eje de las abscisas (Tomo II, pp. 104-105)

De ésta última proposición y del cálculo de la normal resulta una comprobación de que la tangente a un círculo es perpendicular al radio en el punto de contacto.

También enuncia la regla para el cálculo de esta línea en el caso de una curva general.

* Dado el punto de contacto, por medio de sus coordenadas, se calculará la subtangente, y tirando por el extremo de esta y el punto de contacto una línea, esta seña la tangente y la perpendicular a ésta en el punto de contacto será la normal (Tomo II, p. 107)

Como caso particular del cálculo de tangentes contempla el caso de las asíntotas que define como rectas tangentes en el infinito. Concluye el Cálculo Diferencial calculando el coeficiente diferencial de las superficies curvas, de las superficies de los cuerpos de revolución y de sus volúmenes.

Conclusiones.

Las investigaciones presentadas pueden dar una idea de la diversidad de situaciones de investigación en que se puede aplicar y ser útil el método de investigación histórico, sin que ni mucho menos se agoten todas las posibilidades.

Por un lado nos pueden servir para identificar algunos comportamientos, concepciones, ideas que tienen los alumnos y que no son ajenos a la propia matemática. Un buen conocimiento de la matemática y de su devenir histórico puede ser fundamental tanto para el investigador como para el profesor, lo que justificaría y sería aconsejable para su introducción en el currículo de formación de profesores.

El análisis de las fuentes primarias y de los textos históricos nos sumergen en el mundo del matemático que vivió en una determinada época, nos da cuenta de las concepciones y la forma de pensamiento imperante en el momento, nos indica el tipo de problemas y las formas de solución que se gestaron según los instrumentos de los que se disponía, se recuperan algunas ramas de la matemática como, según hemos visto, la visión puramente geométrica de los

subt = z

tan gent

subnorm

normal :

conceptos propios del Análisis e incluso pueden ser fuente de actividades, situaciones o problemas para plantear a los alumnos y diseñar secuencias de aprendizaje, que proporcionen una formación matemática más global y comprensiva que la que se ha practicado en los últimos años.

Por otro lado, el estudio de libros de texto y su evolución a lo largo de la historia, tanto en relación con un determinado concepto como en la estructuración de contenidos, es interesante puesto que nos proporciona información sobre actividades o situaciones que pueden ser perfectamente recuperables en la actualidad, sobre el perfil de un libro que nos ayudará en la elección del manual adecuado según la formación que creamos conveniente para nuestros alumnos, sobre las ventajas e inconvenientes de una determinada metodología u orientación didáctica que en un determinado momento histórico estuvo de "moda", para establecer en qué medida se ajustan a las directrices oficiales marcadas por el Ministerio correspondiente, para determinar el grado de utilización del libro de texto en el aula de matemáticas.

Si revisamos las investigaciones históricas realizadas hasta el momento en didáctica de la matemática, veremos que se pueden agrupar en cuatro líneas: la línea que intenta confrontar la historia con la psicología ligando, por ejemplo, las concepciones de los alumnos con las que han aparecido a lo largo de la historia de la matemática (Sierpinski, 1985); la que intenta utilizar la historia de la matemática en el aula basándose para ello en el uso de textos clásicos bien para motivar y afianzar la comprensión de los alumnos o para formar profesores (Furingueti, 2003); la que intenta estudiar los conceptos bajo una dimensión social considerando que la matemática es un saber de naturaleza histórica que debe ser adquirido por los alumnos en un proceso de tipo social (Miranda, Radford y Guzmán, 2007) o la que intenta comprender las prácticas pedagógicas del pasado, bien relacionadas con un determinado movimiento de innovación didáctica o con el estudio de las prácticas pedagógicas de algún profesor de matemáticas relevante en su momento.

Referencias

- Boyer, C. (1986) *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial
- Bourbaki, N. (1972) *Notas de historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial
- Cobos, J. (1995) *Fondo de libros de matemáticas existentes en Extremadura desde el siglo XVI hasta el XX (1930)*. Cáceres: Universidad de Extremadura.
- Cohen, L. Y Manion, L. (1990) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Cornu (1983): *Apprentissage de la notion de limit. Conceptions et obstacles*. Université de Grenoble (Tesis doctoral)
- Cuesta, N. (1985) *Historia de la invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. y Joshua, M.A. (1982) *Un exemple de 'analyse de transposition didactique: la notion de distance*. *Recherche en Didactique des mathématiques*. 3(1), 159-239.
- Choppin, A. (1993) *L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche française*. *Histoire de l'Éducation*, 58, 165-185.
- Dhombres y otros (1987) *Mathématiques au fil des âges*. París: Gauthier-Vilars.
- Díaz de la Guardia, E. (1988) *Evolución y desarrollo de la enseñanza media en España de 1875 a 1930. Un conflicto cognitivo-pedagógico*. Madrid: Centro de Publicaciones C.I.D.E.
- Dormolen, J. Van (1986) *Textual Análisis*, En B. Christiansen, A.G. Howson, M. Otte (eds.)

- Perspectives on Mathematics Education., 141-171. Dordrecht: Reidel
- Dugac, P. (1981) Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions representables analytiquement. En J. W. Dauben (ed.) *Mathematical perspectives*. New York: Academic Press.
- El Bouazzoui, H. (1988) Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction. Tesis de grado de PhD. Université Laval.
- Fox, D. (1981) El proceso de investigación en educación. Pamplona: Universidad de Navarra.
- Fugirnguetti, F. (2003) Storia della matematica per Insegnanti e Studenti. Investigación en Educación Matemática. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (eds.) *Actas del VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, Granada: Universidad de Granada, 87-95.
- Gall, M.; Borg, W.; Gall, J. (1996) *Educational Research: an introduction*. New York: Longman
- García, V. (1980) *La educación en la España del siglo XX*. Madrid: Ediciones Rialp.
- González, M. T. (2002) *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca
- Grattan-Guinness, Y. (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Editorial
- Hormigón, M. (1991) *Las matemáticas en el siglo XIX*, Colección historia de la Ciencia y de la Técnica. Madrid: Akal.
- Howson, G. (1995) *Mathematics Textbooks: A comparative Study of grade 8 Texts*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Janvier, C. (1987) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associated Publishers.
- Lowe, E. y Pimm, D. (1996) This is so: a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde. *International Handbook of Mathematics Education*, 371-410. Dordrecht: Kluwer.
- Otte, M. (1986) What is a text?. En B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte, (eds.) *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company., 173-203.
- Pimm, D. (1987) *Speaking mathematically*. New York Routledge y Kegan Paul. Traducción cast. (1990) *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencias-Ediciones Morata.
- Pimm, D. (1994) Mathematics classroom language form, function and force. En R. Bielher, R. W. Scholtz, R. Stra?ery B. Winkelmann (eds.) *Didactic of mathematics as a scientific discipline.*, 159-169. Dordrecht: Kluwer.
- Miranda, I; Radford, L. y Guzmán, J. (2007) Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación matemática*, 19 (3), 5-30.
- Rey Pastor, J y Babini, J. (1981) *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gédisa
- Rico, L. y Sierra, M. (1994): Educación matemática en la España del Siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra *Educación Matemática e Investigación*. Madrid: Síntesis, 99-207.
- Schubring, G (1987) On the methodology of analyzing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics*, 7 (3), 41-51.
- Sierpinska, A. (1987) Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-197.
- Sierpinska, A. (1995) Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 6(1),. 5-67.

- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999): Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2001) Diseño, experimentación y evaluación de un Proyecto de enseñanza del análisis Matemático en el Bachillerato. Universidad de Salamanca: Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales (Documento inédito)
- Sierra, M. González, M.T. y López, C. (2002) Una visión integradora acerca del concepto de límite. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*. 77-94.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación Matemática*, 15 (1), 21-51.
- Tavignot, P. (1993) Analyse du processus de transposition didactique. Application a la symétrie orthogonale en sixième lors la réforme de 1985. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13 (3). 257-294.
- Tiana, A. (1988) La investigación histórico-educativa actual. Enfoques y métodos. Madrid: Cuadernos de la UNED
- Utande, M. (1964) Planes de estudio de enseñanza media. Madrid: MEC.
- Vea, F. (1995) Las matemáticas en la educación secundaria en España en el siglo XX. Cuadernos de historia de la ciencia 9. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
- Viñao, A. (1997) De la importancia y utilidad de la historia de la educación (o la responsabilidad moral del historiador). En D. Gabriel; A. Viñao (eds.) *La investigación histórico-educativa*. Barcelona: Roncel.
- Youskevitch, A. P. (1976) The concept of function up to middle of the 19th century. *Archive the history of exact science*, 36-85.

DATOS DE LA AUTORA

María Teresa González Astudillo
Departamento Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales.
Universidad de Salamanca, España.
maite@usal.es